

Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Начнём с примера, поясняющего, на решение каких именно проблем ориентирован метод регуляризации А. Н. Тихонова при численном решении оптимизационных задач.

Пример. Рассмотрим задачу минимизации в гильбертовом пространстве $L^2(0, T)$:

$$J(u) = \int_0^T \left(\int_0^t u(s) ds \right)^2 dt \rightarrow \inf, \quad u \in \{u(t) \in L^2(0, T) \mid |u(t)| \stackrel{\text{п. в.}}{\leq} 1\}.$$

Поскольку $J(u) \geq 0 \forall u \in U$ и при этом $0 \in U$ и $J(0) = 0$, то $J_* = 0$ и $0 \in U_* \neq \emptyset$. Заметим, что элемент $u_* = 0$ является *единственным* оптимальным решением, т. к. из того, что $J(u) = 0$, следует, что

$$\int_0^t u(s) ds = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \implies \quad u(s) = 0 \quad \text{для п. в. } s \in (0, T).$$

Рассмотрим последовательность допустимых управлений $u_k(t) = \sin \frac{\pi kt}{T}$, $k = 1, 2, \dots$. Для них

$$\int_0^t \sin \frac{\pi ks}{T} ds = \frac{T}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{\pi kt}{T} \right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поэтому $J(u_k) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \rightarrow 0$, т. е. последовательность $u_k(t)$ является *минимизирующей* в исходной задаче, однако

$$\rho^2(u_k, U_*) = \|u_k - 0\|_{L^2(0, T)}^2 = \int_0^T \sin^2 \frac{\pi kt}{T} dt = \int_0^T \frac{1 - \cos^2 \frac{2\pi kt}{T}}{2} dt \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{T}{2} \neq 0.$$

Этот пример показывает, насколько трудной может оказаться проблема интерпретации результатов вычислений, если в их процессе вырабатываются приближённые решения типа $u_k(t)$, графики которых при любых k совсем непохожи на 0. Понятно, что если исходные данные $J(u)$ и U известны *неточно*, ситуация может лишь ухудшиться.

Познакомимся с методом, предложенным А. Н. Тихоновым в начале 1960-ых годов, с помощью которого можно (при определённых условиях) заставить минимизирующие последовательности *сильно* (т. е. по норме) сходиться ко множеству оптимальных решений. Во избежание дополнительных технических усложнений мы ограничимся рассмотрением случая, когда допустимое

множество U известно точно. Исходная точная задача минимизации имеет вид:

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \subset H. \quad (1)$$

Здесь H – гильбертово пространство, U – точно заданное допустимое множество, а вместо точных значений функционала $J(u)$ нам доступны некоторые их приближения $\tilde{J}(u)$:

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leq \delta (1 + \|u\|_H^2), \quad u \in U, \quad \delta > 0. \quad (2)$$

Важно, что значение $\delta > 0$, характеризующее уровень погрешности в задании (в вычислении) приближённых значений функции, должно быть *известно*. А. Н. Тихонов предложил от исходной задачи (1) перейти к следующему семейству задач минимизации, зависящих от параметра $\alpha > 0$:

$$T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha \|u\|_H^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U.$$

Параметр α принято называть *параметром регуляризации*, а функционал $T_\alpha(u)$ – *функционалом Тихонова*. Задачу минимизации функционала Тихонова не обязательно решать точно, достаточно найти некоторое её ε -оптимальное решение $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} \in U, \quad T_\alpha(\tilde{u}) \leq \inf_{u \in U} T_\alpha(u) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Как именно находить элементы $\tilde{u}$ из условий (3), в методе Тихонова не конкретизируется. Будем считать, что мы в состоянии обеспечить такой выбор с помощью одного из итерационных методов, изученных в прошлом семестре. Фактически элементы $\tilde{u}$ будут зависеть от трёх параметров: $\tilde{u} = \tilde{u}(\delta, \alpha, \varepsilon)$, из которых уровень погрешности δ является первичным (вычислитель не всегда в состоянии его контролировать), а значения α и ε находятся в нашем распоряжении. Смысл предложений А. Н. Тихонова помимо правила (3) состоит также и в указании правила выбора значений параметров $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, согласованных с уровнем погрешности δ с таким расчётом, чтобы обеспечить асимптотическое приближение элементов $\tilde{u} = \tilde{u}(\delta, \alpha(\delta), \varepsilon(\delta))$ ко множеству U_* оптимальных решений задачи (1) при $\delta \rightarrow 0$. Точнее, справедлива

Теорема 32 (о сходимости метода регуляризации Тихонова). Пусть в задаче (1) пространство H – гильбертово, множество U – выпукло и замкнуто, функционал $J(u)$ – выпуклый и полунепрерывный снизу на U , а также $J_* > -\infty$ и $U_* \neq \emptyset$. Пусть выполнено условие (2), а элементы $\tilde{u}$ выбраны из условий (3), причём значения $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ согласованы с δ так, что

$$\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \varepsilon(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (4)$$

Тогда

$$\tilde{J}(\tilde{u}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} J_*, \quad \|\tilde{u} - u_*\|_H \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad (5)$$

где $u_* \in U_*$ – нормальное оптимальное решение задачи (1), имеющее минимальную норму $\|\cdot\|_H$ среди элементов из U_* .

Доказательство. Из того, что по условию множество U выпукло и замкнуто, функция $J(u)$ выпукла и полунепрерывна снизу, множество U_* непусто, следует, что множество U_* является выпуклым и замкнутым, а тогда задача минимизации на нём *сильно выпуклой* функции $\|u\|_H^2$ имеет *единственное* решение u_* (см. «сильно выпуклый» вариант теоремы Вейерштрасса), которое фигурирует в утверждении (5) и обычно называется *нормальным оптимальным* решением.

Далее отметим, что нижние грани функционала Тихонова на множестве U конечны при $\alpha \geq \delta$:

$$\begin{aligned} T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha \|u\|^2 &\stackrel{(2)}{\geq} J(u) + \alpha \|u\|^2 - \delta (1 + \|u\|^2) \stackrel{\forall u \in U}{\geq} \\ &\geq J_* + (\alpha - \delta) \|u\|^2 - \delta \stackrel{\alpha \geq \delta}{\geq} J_* - \delta > -\infty, \end{aligned}$$

и, тем самым, элементы $\tilde{u}$ действительно могут быть выбраны из условий (3).

Запишем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} J_* = J(u_*) &\stackrel{\tilde{u} \in U}{\leq} J(\tilde{u}) \stackrel{\alpha > 0}{\leq} J(\tilde{u}) + \alpha \|\tilde{u}\|^2 \stackrel{(2)}{\leq} T_\alpha(\tilde{u}) + \delta (1 + \|\tilde{u}\|^2) \stackrel{(3)}{\leq} \\ &\leq \inf_{u \in U} T_\alpha(u) + \varepsilon + \delta (1 + \|\tilde{u}\|^2) \stackrel{u_* \in U}{\leq} T_\alpha(u_*) + \varepsilon + \delta (1 + \|\tilde{u}\|^2) \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\leq J(u_*) + \delta (1 + \|u_*\|^2) + \alpha \|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta (1 + \|\tilde{u}\|^2) = \\ &= J_* + 2\delta + \varepsilon + (\delta + \alpha) \|u_*\|^2 + \delta \|\tilde{u}\|^2. \quad (6) \end{aligned}$$

Выделим из (6) неравенство

$$J(\tilde{u}) + \alpha \|\tilde{u}\|^2 \leq J_* + 2\delta + \varepsilon + (\delta + \alpha) \|u_*\|^2 + \delta \|\tilde{u}\|^2.$$

В силу того, что $J_* \leq J(\tilde{u})$, из него можно извлечь следствие

$$(\alpha - \delta) \|\tilde{u}\|^2 \leq 2\delta + \varepsilon + (\delta + \alpha) \|u_*\|^2,$$

обе части которого поделим на разность $\alpha - \delta$, которая по условию (4) положительна при достаточно малых $\delta > 0$, а затем перейдём к пределу при $\delta \rightarrow 0$:

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|\tilde{u}\|^2 \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{2\delta + \varepsilon}{\alpha - \delta} + \frac{\delta + \alpha}{\alpha - \delta} \|u_*\|^2 \right) = \|u_*\|^2. \quad (7)$$

Заметим, что оценки вида (7) играют *важнейшую* роль в доказательствах сходимости *различных методов регуляризации*.

Теперь выделим из (6) следующие звенья:

$$J_* \leq J(\tilde{u}) \leq T_\alpha(\tilde{u}) + \delta(1 + \|\tilde{u}\|^2) \leq J_* + 2\delta + \varepsilon + (\delta + \alpha)\|u_*\|^2 + \delta\|\tilde{u}\|^2,$$

из которых, с учётом условий (2), определения функционала Тихонова $T_\alpha(\tilde{u}) = \tilde{J}(\tilde{u}) + \alpha\|\tilde{u}\|^2$ и установленной в (7) ограниченности семейства регуляризованных приближений $\tilde{u}$, следует, что

$$\exists \lim_{\delta \rightarrow 0} J(\tilde{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{J}(\tilde{u}) = J_*, \quad (8)$$

т. е. утверждение (5) в отношении сходимости по функционалу доказано.

Теперь докажем и главное утверждение теоремы о сильной сходимости $\tilde{u}$ к u_* . Из (7) следует ограниченность семейства элементов $\tilde{u}$ в гильбертовом пространстве H , значит, у этого семейства имеются слабые в H предельные точки при $\delta \rightarrow 0$. Возьмём *произвольную* из этих слабых предельных точек, обозначим её через u_0 и выделим соответствующие подпоследовательности, такие, что при $n \rightarrow \infty$ погрешности $\delta_n \rightarrow 0$, а элементы $\tilde{u}_n \rightarrow u_0$ слабо в H . По условию функция $J(u)$ выпукла и полунепрерывна снизу, следовательно, она слабо полунепрерывна снизу, а тогда

$$J(u_0) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} J(\tilde{u}_n) \stackrel{(8)}{=} J_*.$$

Кроме того, множество U выпукло и замкнуто, следовательно, оно *слабо замкнуто* и потому содержит слабую предельную точку u_0 последовательности $\tilde{u}_n \in U$. Это означает, что $u_0 \in U_*$, т. е. u_0 является оптимальным решением исходной задачи (1). Функционал $\|u\|^2$ (стабилизатор) также слабо полунепрерывен снизу, поэтому

$$\|u_0\|^2 \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|^2 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|^2 \stackrel{(7)}{\leq} \|u_*\|^2.$$

Отсюда и из *единственности* нормального оптимального решения u_* следует, что $u_0 = u_*$, т. е. у семейства $\tilde{u}$ при $\delta \rightarrow 0$ есть лишь *одна* слабая предельная точка, а именно u_* . Из установленной слабой в H сходимости $\tilde{u} \rightarrow u_*$ и оценки (7) следует искомая сильная сходимость:

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \|\tilde{u} - u_*\|^2 = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \left(\|\tilde{u}\|^2 - 2\langle \tilde{u}, u_* \rangle + \|u_*\|^2 \right) \stackrel{(7)}{\leq} \|u_*\|^2 - 2\|u_*\|^2 + \|u_*\|^2 = 0.$$

Обратим внимание на то, что в последних выкладках было важно, что в правой части оценки (7) коэффициент перед нормой элемента u_* равен именно 1, а не $1 + \beta$, с достаточно малым $\beta > 0$. Теорема 32 доказана. ▼

Замечание 1. Качественно данная в (4) рекомендация в отношении согласования параметров состоит в том, что по сравнению с уровнем погрешности δ и точностью ε решения регуляризованной задачи (3) параметр регуляризации α должен стремиться к 0 *медленнее*. Разумеется, чрезмерное замедление стремления параметра α к 0 также нежелательно, поскольку при относительно больших α несмотря на улучшение характеристик функционала Тихонова он заметно отклоняется от функции $J(u)$, что может ослабить связь с исходной постановкой задачи (1).

Замечание 2. Поясним причины, по которым условия на уровень погрешности в задании функции $J(u)$ были записаны в форме (2). Во-первых, эта форма более мягкая по сравнению с возможно ожидаемым условием равномерной на U близости вида

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leq \delta \quad \forall u \in U.$$

Во-вторых, для квадратичных функционалов вида $J(u) = \|Au - f\|_F^2 : H \rightarrow R^1$, с которыми довольно часто приходится иметь дело на практике, в случае неточно заданного оператора $A \in L(H \rightarrow F)$ и точно заданного элемента $f \in F$ оценка погрешности как раз принимает вид (2). Действительно, пусть для приближённых операторов $\tilde{A} \in L(H \rightarrow F)$ известны оценки точности

$$\|\tilde{A} - A\| \leq \delta_A. \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{J}(u) - J(u)| &= \|\tilde{A}u - f\|_F^2 - \|Au - f\|_F^2 = |\langle (\tilde{A} - A)u, (\tilde{A} + A)u - 2f \rangle_F| \leq \\ &\leq \|\tilde{A} - A\| \|u\|_H \left(\|\tilde{A} - A\| \|u\|_H + 2\|A\| \|u\|_H + 2\|f\|_F \right) \stackrel{(9)}{\leq} \\ &\leq \delta_A^2 \|u\|_H^2 + 2\delta_A \|u\|_H^2 \|A\| + 2\delta_A \|u\|_H \|f\|_F \leq \\ &\leq \delta_A^2 \|u\|_H^2 + 2\delta_A \|u\|_H^2 \|A\| + \delta_A \|u\|_H^2 + \delta_A \|f\|_F^2 \leq \\ &\leq \delta_A \max\{\delta_A + 2\|A\| + 1, \|f\|_F^2\} (1 + \|u\|_H^2), \end{aligned}$$

т. е. оценка погрешности для квадратичного функционала на самом деле принимает вид (2), если взять

$$\delta = \delta_A \max\{\delta_A + 2\|A\| + 1, \|f\|_F^2\}.$$